Chua-Oszillator

Fabian Paul

Semesterfahrt 2011 Bad Saarow

Inhalt

geschichtlicher Rahmen

- Systemlehre (von Bertalanffy, 20er bis 60er): Gegenposition zum Reduktionismus, aus der Biologie inspiriert, universelle Denkweise, offene Systeme, organisierte Komplexität, Vernetzung
- Kybernetik (Wiener, 40er): Regelung und Steuerung, feedback-Mechanismen, Kontrolle , ist-Wert, soll-wert Vergleich, Regelkreis, spezieller Teil der Systemlehre ▷
- Soziologische Systemtheorie (Parsons, Luhmann): soziales Netzwerk, ausdifferenzieren von Teilsystemen wie Recht, Wirtschaft, Wissenschaft. Matthäus-Effekt
- Informationstheorie (Shannon): Informationsmaß, Nachrichtenaustausch über einen verauschten Kanal
- Chaostheorie (Poincaré, Lorenz,...): Schmetterlingseffekt, Wege ins Chaos, seltsame Attraktoren

geschichtlicher Rahmen

- Systemlehre (von Bertalanffy, 20er bis 60er): Gegenposition zum Reduktionismus, aus der Biologie inspiriert, universelle Denkweise, offene Systeme, organisierte Komplexität, Vernetzung
- Kybernetik (Wiener, 40er): Regelung und Steuerung, feedback-Mechanismen, Kontrolle , ist-Wert, soll-wert Vergleich, Regelkreis, spezieller Teil der Systemlehre ▷
- Soziologische Systemtheorie (Parsons, Luhmann): soziales Netzwerk, ausdifferenzieren von Teilsystemen wie Recht, Wirtschaft, Wissenschaft. Matthäus-Effekt
- Informationstheorie (Shannon): Informationsmaß, Nachrichtenaustausch über einen verauschten Kanal
- Chaostheorie (Poincaré, Lorenz,...): Schmetterlingseffekt, Wege ins Chaos, seltsame Attraktoren

geschichtlicher Rahmen

- Systemlehre (von Bertalanffy, 20er bis 60er): Gegenposition zum Reduktionismus, aus der Biologie inspiriert, universelle Denkweise, offene Systeme, organisierte Komplexität, Vernetzung
- Kybernetik (Wiener, 40er): Regelung und Steuerung, feedback-Mechanismen, Kontrolle , ist-Wert, soll-wert Vergleich, Regelkreis, spezieller Teil der Systemlehre ▷
- Soziologische Systemtheorie (Parsons, Luhmann): soziales Netzwerk, ausdifferenzieren von Teilsystemen wie Recht, Wirtschaft, Wissenschaft. Matthäus-Effekt
- Informationstheorie (Shannon): Informationsmaß, Nachrichtenaustausch über einen verauschten Kanal
- Chaostheorie (Poincaré, Lorenz,...): Schmetterlingseffekt, Wege ins Chaos, seltsame Attraktoren

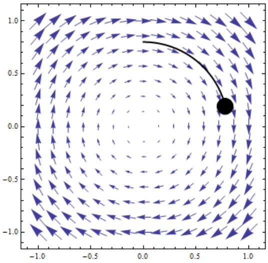
geschichtlicher Rahmen

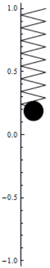
- Systemlehre (von Bertalanffy, 20er bis 60er): Gegenposition zum Reduktionismus, aus der Biologie inspiriert, universelle Denkweise, offene Systeme, organisierte Komplexität, Vernetzung
- Kybernetik (Wiener, 40er): Regelung und Steuerung, feedback-Mechanismen, Kontrolle , ist-Wert, soll-wert Vergleich, Regelkreis, spezieller Teil der Systemlehre ▷
- Soziologische Systemtheorie (Parsons, Luhmann): soziales Netzwerk, ausdifferenzieren von Teilsystemen wie Recht, Wirtschaft, Wissenschaft. Matthäus-Effekt
- Informationstheorie (Shannon): Informationsmaß, Nachrichtenaustausch über einen verauschten Kanal
- Chaostheorie (Poincaré, Lorenz,...): Schmetterlingseffekt, Wege ins Chaos, seltsame Attraktoren

geschichtlicher Rahmen

- Systemlehre (von Bertalanffy, 20er bis 60er): Gegenposition zum Reduktionismus, aus der Biologie inspiriert, universelle Denkweise, offene Systeme, organisierte Komplexität, Vernetzung
- Kybernetik (Wiener, 40er): Regelung und Steuerung, feedback-Mechanismen, Kontrolle , ist-Wert, soll-wert Vergleich, Regelkreis, spezieller Teil der Systemlehre ▷
- Soziologische Systemtheorie (Parsons, Luhmann): soziales Netzwerk, ausdifferenzieren von Teilsystemen wie Recht, Wirtschaft, Wissenschaft. Matthäus-Effekt
- Informationstheorie (Shannon): Informationsmaß, Nachrichtenaustausch über einen verauschten Kanal
- Chaostheorie (Poincaré, Lorenz,...): Schmetterlingseffekt, Wege ins Chaos, seltsame Attraktoren

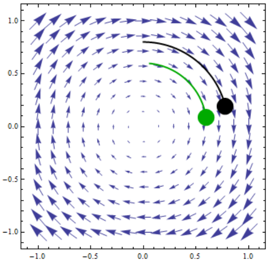
Harmonischer Oszillator im Phasenraum

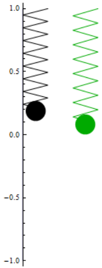




$$x''(t) = -x(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

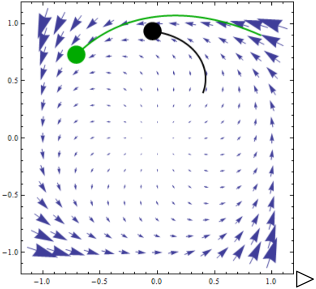
Harmonischer Oszillator im Phasenraum





$$x''(t) = -x(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

ein nichtlineares Beispiel



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \text{Polynome 3. Ordnung}$$

$$= \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \text{ wenn } x^2 + y^2 = 1$$

Dynamische Systeme

Dynamisches System

Abbildung
$\Phi(t, m)$: Zeit, dynamische Variable $\rightarrow$ dynamische Variable
mit den Eigenschaften: $\Phi(0, m) = m$ und
$\Phi(t_2, \Phi(t_1, m)) = \Phi(t_1 + t_2, m)$
Die Menge aller m heißt Phasenraum, Φ heißt Fluss.

Satz

Bahnen können sich nicht kreuzen!

Beweis: Zu widerlegen: zwei Bahnen können sich schneiden.
D. h., es gibt t, m_1, m_2 mit $\Phi(t, m_1) = \Phi(t, m_2)$ und $m_1 \neq m_2$
Wende die Zeittranslationsinvarianz $\Phi(-t, .)$ auf beiden Seiten der Gl. an $\Phi(-t, \Phi(t, m_1)) = \Phi(-t, \Phi(t, m_2)) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ ↯

Dynamische Systeme

Dynamisches System

Abbildung
$\Phi(t, m)$: Zeit, dynamische Variable $\rightarrow$ dynamische Variable
mit den Eigenschaften: $\Phi(0, m) = m$ und
$\Phi(t_2, \Phi(t_1, m)) = \Phi(t_1 + t_2, m)$
Die Menge aller m heißt Phasenraum, Φ heißt Fluss.

Satz

Bahnen können sich nicht kreuzen!

Beweis: Zu widerlegen: zwei Bahnen können sich schneiden.
D. h., es gibt t, m_1, m_2 mit $\Phi(t, m_1) = \Phi(t, m_2)$ und $m_1 \neq m_2$
Wende die Zeittranslationsinvarianz $\Phi(-t, .)$ auf beiden Seiten der Gl. an $\Phi(-t, \Phi(t, m_1)) = \Phi(-t, \Phi(t, m_2)) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ ↯

Dynamische Systeme

Dynamisches System

Abbildung
$\Phi(t, m)$: Zeit, dynamische Variable $\rightarrow$ dynamische Variable
mit den Eigenschaften: $\Phi(0, m) = m$ und
$\Phi(t_2, \Phi(t_1, m)) = \Phi(t_1 + t_2, m)$
Die Menge aller m heißt Phasenraum, Φ heißt Fluss.

Satz

Bahnen können sich nicht kreuzen!

Beweis: Zu widerlegen: zwei Bahnen können sich schneiden.
D. h., es gibt t, m_1, m_2 mit $\Phi(t, m_1) = \Phi(t, m_2)$ und $m_1 \neq m_2$
Wende die Zeittranslationsinvarianz $\Phi(-t, .)$ auf beiden Seiten der Gl. an $\Phi(-t, \Phi(t, m_1)) = \Phi(-t, \Phi(t, m_2)) \Leftrightarrow m_1 = m_2 \lightning$

deterministisches Chaos

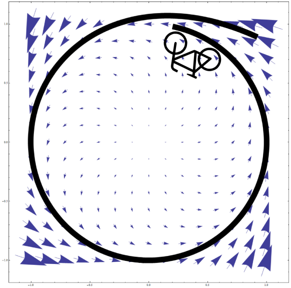
Chaos: ähnliche Anfangbedingungen können sich zu sehr unterschiedlichen Zuständen entwickeln.

Gedankenexperiment: deterministischer Radfahrer auf dem Ausschnitt einer Ebene stößt auf seine eigene Spur. Optionen:

- anhalten (Fixpunkt)
- die Bahn wiederholen (Grenzzyklus)

⇒ wir brauchen 3 Dimensionen

- zwei Richtungen, in denen das System schwingt
- eine Richtung, die Bahnen „mischt"



deterministisches Chaos

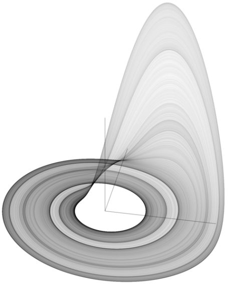
Chaos: ähnliche Anfangbedingungen können sich zu sehr unterschiedlichen Zuständen entwickeln.

Gedankenexperiment: deterministischer Radfahrer auf dem Ausschnitt einer Ebene stößt auf seine eigene Spur. Optionen:

- anhalten (Fixpunkt)
- die Bahn wiederholen (Grenzzyklus)

$\Rightarrow$ wir brauchen 3 Dimensionen

- zwei Richtungen, in denen das System schwingt
- eine Richtung, die Bahnen „mischt”



Rezept für Chaos

Ingredenzien:

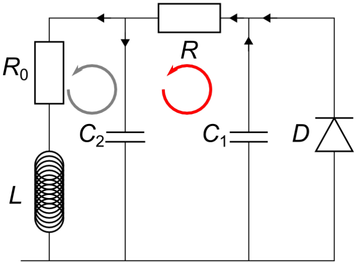
- Schwingung: Schwingkreis mit drei dynamischen Variablen
- Energiezufuhr: „Negativer Impedanzkonverter” aus Operationsverstäker gebaut, offene Stelle des Systems.
- Nichtlinearität, hier Knicke in der Charakteristik der „Chua-Diode”: Diodenpaar (sorgt auch für endliche Amplidute)

Knoten- und Maschengleichungen

$$U_R + U_{C_2} + U_{C_1} = 0$$

mit $U_R = RI_R$

$$\Rightarrow RI_R = -U_{C_1} - U_{C_2}$$



Ergebnisse

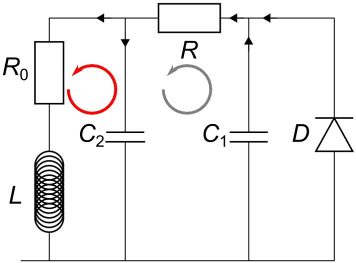
$$L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$
$$C_2\dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$
$$C_1\dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

Knoten- und Maschengleichungen

$$U_{R_0} + U_L - U_{C_2} = 0$$

mit $U_L = L\dot{I}_L$
und $U_{R_0} = R_0 I_L$

$$\Rightarrow L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$



Ergebnisse

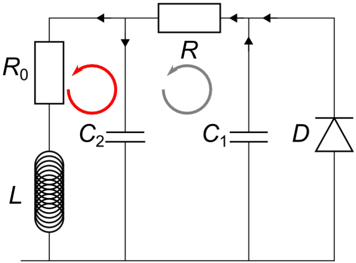
$$L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$
$$C_2\dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$
$$C_1\dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

Knoten- und Maschengleichungen

$$U_{R_0} + U_L - U_{C_2} = 0$$

mit $U_L = L\dot{I}_L$
und $U_{R_0} = R_0 I_L$

$$\Rightarrow L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$



Ergebnisse

$$L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$
$$C_2\dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$
$$C_1\dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

Knoten- und Maschengleichungen

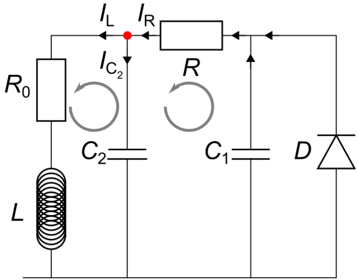
$$-I_L + I_R - I_{C_2} = 0$$

mit $I_C = C\dot{U}_C$

$$\Rightarrow C_2\dot{U}_2 = -I_L + I_R$$

und M1

$$\Rightarrow C_2\dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$



Ergebnisse

$$L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$
$$C_2\dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$
$$C_1\dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

Knoten- und Maschengleichungen

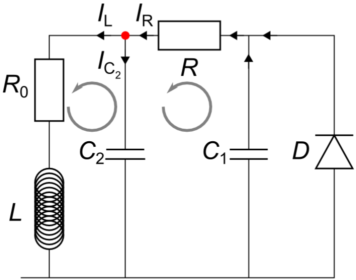
$$-I_L + I_R - I_{C_2} = 0$$

mit $I_C = C\dot{U}_C$

$$\Rightarrow C_2\dot{U}_2 = -I_L + I_R$$

und M1

$$\Rightarrow C_2\dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$



Ergebnisse

$$L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$
$$C_2\dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$
$$C_1\dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

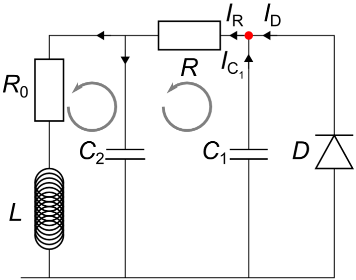
Knoten- und Maschengleichungen

$$I_D - I_R + I_{C_1} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 \dot{U}_1 = I_R - I_D$$

mit M 1

$$\Rightarrow C_1 \dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$



Ergebnisse

$$L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$
$$C_2 \dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$
$$C_1 \dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

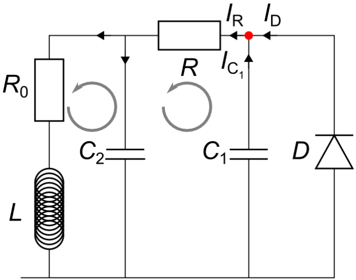
Knoten- und Maschengleichungen

$$I_D - I_R + I_{C_1} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 \dot{U}_1 = I_R - I_D$$

mit M 1

$$\Rightarrow C_1 \dot{U}_1 = - I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

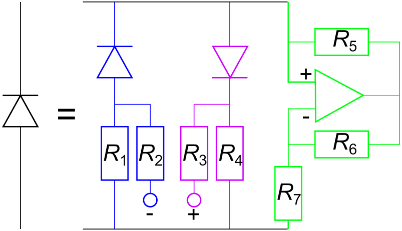


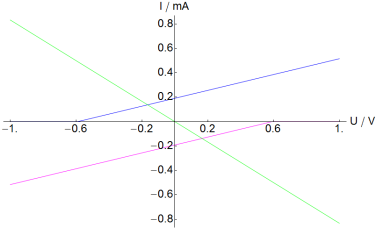
Ergebnisse

$$L\dot{I}_L = U_2 - R_0 I_L$$
$$C_2 \dot{U}_2 = -I_L - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$
$$C_1 \dot{U}_1 = -I_D(U_1) - \frac{1}{R}(U_1 + U_2)$$

Chua-Diode

Charakteristik $I_D(U)$

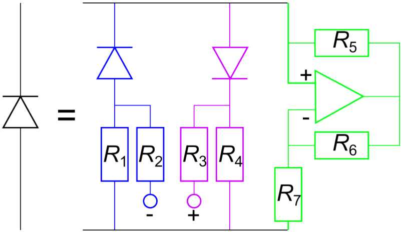


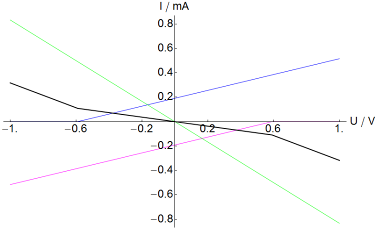


- An allen Teilen liegt die selbe Spannung U an.
- Parallelschaltung $\rightarrow$ $I(U)$ aller Teile addieren sich für jeden Wert von U.

Chua-Diode

Charakteristik $I_D(U)$





- An allen Teilen liegt die selbe Spannung U an.
- Parallelschaltung $\rightarrow$ $I(U)$ aller Teile addieren sich für jeden Wert von U.

Negativer Widerstand

Prinzip des Operationsverstärkers

- Spannungsdifferenz der Eingänge wird sehr stark verstärkt als Ausgangsspannung ausgegeben.
- Es fließt kein Strom in die Eingänge. (O1)

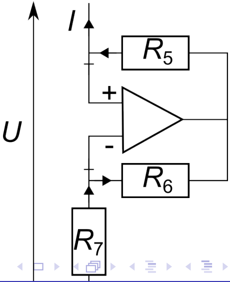
Operationsverstärker mit negativer Rückkopplung $\rightarrow$ Spannung an den Eingängen ist gleich. (O2)

$O2 \rightarrow U = U_7,\ U_5 + U_6 = 0$ mit $U = RI$ folgt

$$I_5 R_5 + I_6 R_6 = 0$$

Knotengesetze mit *O1*

$$IR_5 + I_6 R_7 = 0 \Leftrightarrow I_5 R_5 + U \frac{R_6}{R_7} = 0$$



Nichtlinearität

Masche:

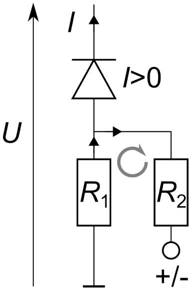
$$U_1 + U_2 = U_\pm \Rightarrow U_2 = U_\pm - U$$

Knoten:

$$-I + I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{R_1} - \frac{U_2}{R_2}$$

(M $\rightarrow K$)

$$I = \left[U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{R_2} U_\pm \right] \Theta\left[\pm\left(U_\pm \frac{R_1}{R_1 + R_2} - U\right)\right]$$



Nichtlinearität

Masche:

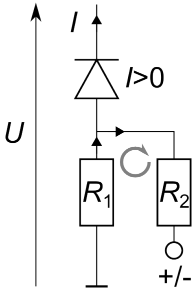
$$U_1 + U_2 = U_\pm \Rightarrow U_2 = U_\pm - U$$

Knoten:

$$-I + I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{R_1} - \frac{U_2}{R_2}$$

(M $\rightarrow K$)

$$I = \left[U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{R_2} U_\pm \right] \Theta[\pm(U_\pm \frac{R_1}{R_1 + R_2} - U)]$$



Synchronisation?

- von Grenzzyklen ▷
- von chaotischen Systemen

Zwei Systeme A und B: Was ist identische Synchronisation von A und B?

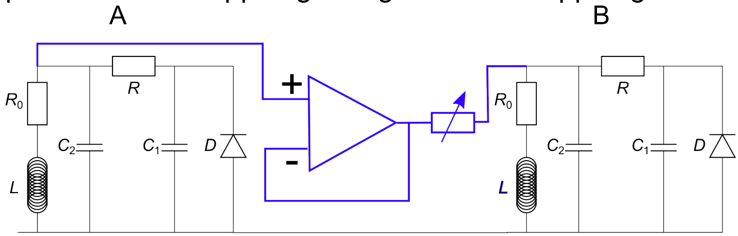
$$\left.\begin{array}{l} I_A \to I_B \\ U_{1,A} \to U_{1,B} \\ U_{2,A} \to U_{2,B} \end{array}\right\} \text{für } t \to \infty$$

Maß für die Synchronisation?

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2}(I_A - I_B)$$

Synchronisation erzeugen

positive Fremdkopplung + negative Rückkopplung



$$\dot{U}_{2,B} = \frac{1}{C_2}[-I_{L,B} - (U_{1,B} + U_{2,B})/R] + K(U_{2,A} - U_{2,B})$$

Videos I

- Niklas Roy.
  My little piece of Privacy.
  interactive installation, 2010.
- Ikeguchi Laboratory.
  Synchronization of two candles 2009.